Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Teorema (Ponte)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in DA$ e $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \iff \left[\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \text{ con } \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell \right]$$

Nota bene che a sinistra trattiamo limite di una funzione $f(x)$ mentre a destra si studia il limite della successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$

Esempio Proviamo che $\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen} x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$

Attenzioniamo il caso $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

Usando il teorema Ponte, per provare che $\nexists \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ basta trovare $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty = \lim_{n\to+\infty} y_n$$

ma $$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(x_n) = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(y_n)$$

Scegliamo $$x_n = 0 + 2n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1. $$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} 2n\pi = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi}{2} + 2n\pi = +\infty$$

2. Nota $\operatorname{sen}(x_n) = \operatorname{sen}(0 + 2n\pi) = \operatorname{sen}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(x_n) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

Mentre $\operatorname{sen}(y_n) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(y_n) = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1$$

Ricordare la priodicità della funzione sen x

Conclusione: $\nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

Successioni definite per Ricorrenza

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione

Fissato $a_1 \in A$ definiamo la successione nel seguente modo

$$a_2 = f(a_1), \quad a_3 = f(a_2), \quad \ldots$$

In generale $$a_{n+1} = f(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nasce così una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e come tutte le successioni vogliamo studiare il carattere, ossia

$$\lim_{n\to+\infty} a_n$$

<u>Passo 1</u> Stabilire che $a_n \in A \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ciò per avere senso la successione ($f(a_n)$!!!)

<u>Passo 2</u> Studiare la regolarità di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(attraverso la monotonia di $f(x)$)

<u>Passo 3</u> Se <u>$f(x)$</u> è <u>continua</u> e

$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, dal fatto che

$$l = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(l)$$

Otteniamo $\boxed{l = f(l)}$

<u>Esercizio</u>

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} & \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Dalla definizione di a_{n+1}, notiamo già la legge della funzione iterazione $f(x) = \sqrt{1+x}$

$CE = x \geq -1$

Passo 1 $a_n \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$?

Risposta facile : $a_1 = 1$ Ok

$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \geq 0$ Ok

Passo 2 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot 1 > 0$ sempre $\forall x > -1$

$\Longrightarrow$ $f(x)$ è sempre crescente

$a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\Longrightarrow$ $a_1 < a_2$

$\overset{f \text{ cresce}}{\Longrightarrow}$ $f(a_1) < f(a_2)$

$a_2 < a_3$

$\overset{f \text{ cresce}}{\Longrightarrow}$ $f(a_2) < f(a_3)$

$a_3 < a_4$ . . .

$\Longrightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente

$$a_n \le a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Dal teorema sui limiti di successioni monotone

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$$

se $\ell\in\mathbb{R}$, essendo $f(x)$ continua

Passo 3

$$\boxed{\ell = F(\ell) = \sqrt{1+\ell}}$$

Nota che $a_n > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \ge 0$

Studio $\quad \ell = \sqrt{1+\ell}$

$$\ell^2 = 1+\ell$$

$$\boxed{\ell^2 - \ell - 1 = 0}$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$\cancel{\ell_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \quad , \quad \boxed{\ell_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

poiché $\ell_1 < 0$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Verifica: $a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$a_1 = 1 < 3$ ok

$a_2 = \sqrt{2} < 3$ ok

Assumo che $a_n \leq 3$ e provo che $a_{n+1} \leq 3$

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 < 3$$

ok

Questo mi basta per dire che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata superiormente, quindi:

$$l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$$

Esercizio Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$CE \quad \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$CE = [0, +\infty[$$

Inutile fare $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \sqrt{1} = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (+\infty - \infty \ f.i.)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\cancel{x}+1) - \cancel{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x+1}}_{+\infty} + \underbrace{\sqrt{x}}_{+\infty}} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{y = 0 \text{ è Asintoto Orizz. Destro}}$

In tal caso non ho bisogno di andare alla ricerca dell' Asintoto Obliquo.

$f(x)$ è continua in $[0, +\infty[$

Studio Monotonia di $f(x)$

$$\boxed{f'(x) \geq 0}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x+1}} \geq \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}$$

passo ai reciproci:

$$\sqrt{x+1} \leq \sqrt{x}$$

elevo al quadrato

$$\cancel{x}+1 \leq \cancel{x}$$

$$1 \leq 0 \qquad \text{Mai}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \text{ è decrescente in } [0, +\infty[$$

Convessità:

$$\boxed{f''(x) \geq 0}$$

Riscrivo $F'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$

$$F''(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} - \left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right] \geq 0 \ (?)$$

$$\iff -\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}} \geq 0$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{x^3}} \geq \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}$$

$$\iff \sqrt{x^3} \leq \sqrt{(x+1)^3}$$

$$\iff x^3 \leq (x+1)^3$$

$$\sqrt[3]{x^3} \leq \sqrt[3]{(x+1)^3}$$

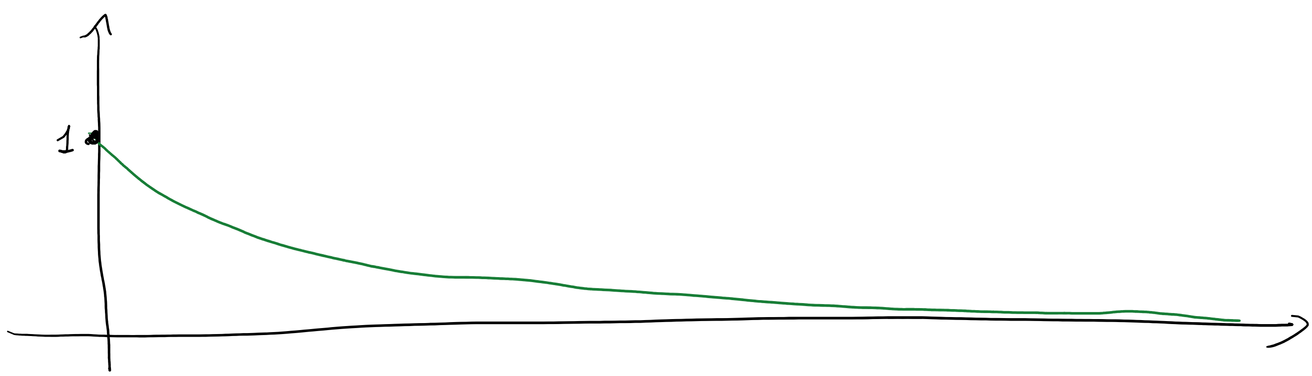
Prendo radice cubica di ambo i membri

$$x \leq x+1$$

$$0 \leq 1 \quad \text{Sempre}$$

$\Rightarrow f(x)$ è convessa in $]0,+\infty[$

Grafico della funzio



$$\sup f = 1 = \max f = f(0)$$

$\inf f = 0$ ma non min !

Argomenti di Esame (Prova in itinere)

1. Inf e sup di un insieme
2. limiti di funzioni
3. Campo di esistenza e Asintoti di una funzione
4. Immagine di una funzione
5. Punti di discontinuità (Natura)
6. Punti di non derivabilità (Natura)
7. Inf e sup di una funzione
8. Convessità e flessi
9. Grafico di una funzione

__Esercizio__ (6-12-1986)

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{2x}{1+x}}_{\to 2} \left(\overset{\to +\infty}{x} - \overset{\to +\infty}{\log x} \right) = (\infty - \infty \text{ f.i.})$$

A parte $\lim_{x \to +\infty} x - \log x = (*)$

$$\left[\text{Facciamo } \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} \overset{\text{De l'Hop}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \right]$$

$$(*) = \lim_{x \to +\infty} x \left[1 - \frac{\log x}{x} \right] = +\infty$$

$$(*) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to+\infty}\left[1 - \underbrace{\frac{\log x}{x}}_{\to 0}\right] = +\infty$$

Calcolo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x}(x-\lg x) = +\infty$

Esercizio (6-12-1996)

$$f(x) = \begin{cases} 3^{1+2x} & \text{se } x\in\,]-\infty,0[\\ x^3-4x+7 & \text{se } x\in[0,1] \end{cases} \quad f(1)=4$$

Determ. $\inf f$ e $\sup f$ (stabilendo se sono $\min f$ e/o $\max f$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3^{\overbrace{1+2x}^{\to-\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} 3^{2x+1} = 3$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x^3-4x+7 = 7$$

$\Rightarrow$ $x=0$ è disc. di $\underline{1^e \text{ specie}}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\log 3}\cdot 3^{1+2x} & \text{se } x\in\,]-\infty,0[\\ 3x^2-4 & \text{se } x\in\,]0,1[\end{cases}$$

$f'(x) \geq 0$?

$f'(x) \geq 0$ sempre in $]-\infty, 0[$

Caso $x \in]0,1[$

$3x^2 - 4 \geq 0$

$\Delta = 0^2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3$

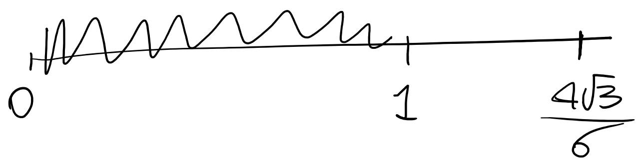
$\cancel{x \leq -\frac{4\sqrt{3}}{6}} \cup x \geq \frac{4\sqrt{3}}{6}$

ma $\frac{4\sqrt{3}}{6} < 1$? $\iff 4\sqrt{3} < 6$

$\iff 2\sqrt{3} < 3$

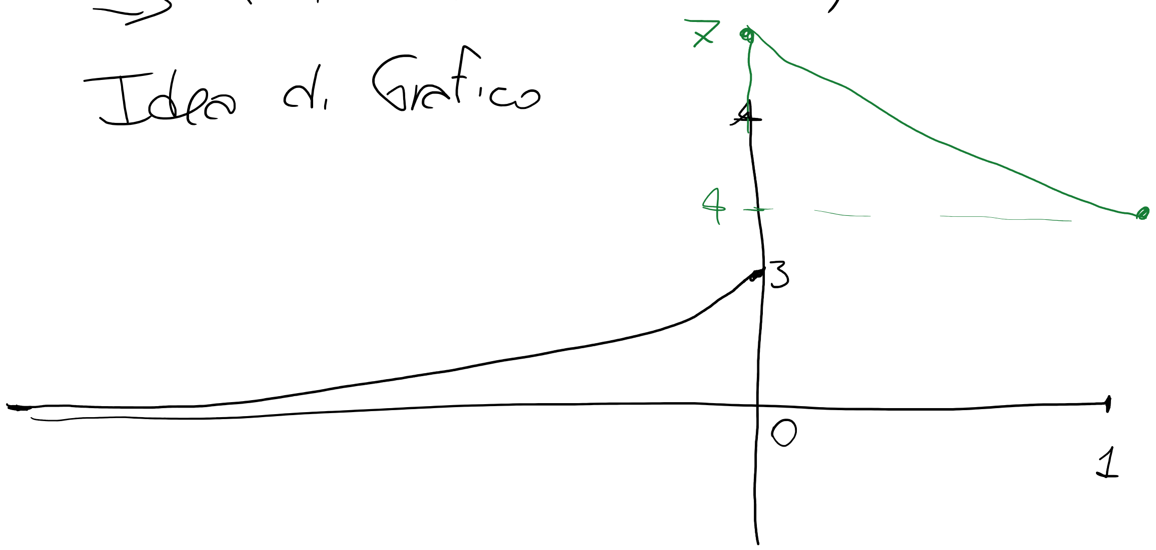
$\iff 4 \cdot 3 < 9$ NO

$f'(x) \leq 0$



$\Rightarrow f(x)$ decresce in $[0,1]$

Idea di Grafico



$$\Rightarrow \quad \sup f = 7 = \max f = f(0)$$

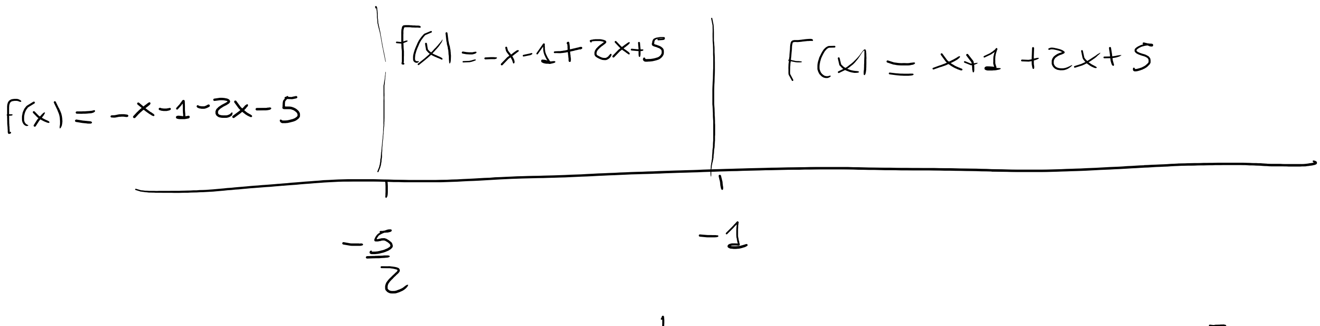
$$\inf f = 0 \qquad \text{Ne} \quad \underline{\min}$$

<u>Esercizio</u> Derivabilità della funzione.

$$f(x) = |x+1| + |2x+5|$$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \quad (x \geq -1) \\ -x-1 & \text{se } x+1 < 0 \quad (x < -1) \end{cases}$$

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5 & \text{se } 2x+5 \geq 0 \quad \left(x \geq -\frac{5}{2}\right) \\ -2x-5 & \text{se } 2x+5 < 0 \quad \left(x < -\frac{5}{2}\right) \end{cases}$$



<u>Ossia</u>

$$f(x) = \begin{cases} -3x-6 & \text{se } x < -\frac{5}{2} \\ x+4 & \text{se } -\frac{5}{2} \leq x < -1 \\ 3x+6 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } x < -\frac{5}{2} \\ 1 & \text{se } -\frac{5}{2} < x < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{5}{2} < x < -1 \\ 3 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\frac{5}{2}^-} f'(x) = -3 \qquad \lim_{x \to -\frac{5}{2}^+} f'(x) = 1$$

$\Rightarrow x = -\frac{5}{2}$ è angoloso

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -1^+} f'(x) = 3$$

$\Rightarrow x = -1$ è angoloso

Esercizio Derivabilità della funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \dots \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} - \frac{e^{\overset{\to -\infty}{\frac{1}{x}}} \to 0}{\underset{\to 0}{x^2}} = (*)$$

$$z = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0^-} z = -\infty$$

$$(CV) \quad (*) = - \lim_{z \to -\infty} e^{z} \cdot z^2 =$$

$$= - \lim_{z \to -\infty} \frac{z^2}{e^{-z}} \overset{=}{=} \text{De l'Hop}$$

$$= - \lim_{z \to -\infty} \frac{2z}{-e^{-z}} = \text{De l'Hop}$$

$$= - \lim_{z \to -\infty} \frac{2}{\underset{\to +\infty}{e^{-z}}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\overset{\to +\infty}{\frac{1}{x}}} \to 0}{\underset{\to 0}{x^2}} = (CV)$$

$$z = \frac{1}{x} \qquad \lim - \frac{1}{x} = -\infty$$

$z = -\frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$

$$= \lim_{z \to -\infty} e^{z} \cdot z^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è sempre derivabile

Esercizio Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \underset{\downarrow\,+\infty}{x^2} \left(\left(1 + \underset{\downarrow\,0}{\frac{x}{x^3+1}}\right)^{\sqrt{3}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^2 \left[\frac{\left(1+\frac{x}{x^3+1}\right)^{\sqrt{3}} - 1}{\frac{x}{x^3+1}} \right] \cdot \frac{x}{x^3+1}$$

$$= \underset{\downarrow\,1}{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3+1}} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1+\frac{x}{x^3+1}\right)^{\sqrt{3}} - 1}{\frac{x}{x^3+1}} = (*)$$

$z = \frac{x}{x^3+1}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} z = 0$

$$(*) = \lim_{z \to 0} \frac{(1+z)^{\sqrt{3}} - 1}{z} = \sqrt{3}$$

$$= 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$$